PRACE MATEMATYCZNE III, 197?

ERWIN KASPAREK, MICHAŁ LORENS

COMITANTS DIFFÉRENTIELS DE L'OBJECT Λ_ν

INTRODUCTION. Soit X^n une variété différentiable de dimension n. Désignons par

(1) $$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^k), \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

une transformation du systéme de coordonnées locales.

Introduisons la notation suivante

$$A^i_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}, \quad B^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}$$

(2) $$A^i_{j1\ldots js} = \frac{\partial^s \bar{x}^i}{\partial x^{js} \ldots \partial x^{j1}}, \quad B^i_{j1\ldots js} = \frac{\partial^s x^i}{\partial \bar{x}^{js} \ldots \partial \bar{x}^{j1}}$$

$$J = \det [A^i_k] \neq 0.$$

Désignons par $V_{,l}$ la dérivée partielle de la function V par rapport à x^l. M. Kucharzewski (voir [1]) a demontré qu'on peut déterminer une dérivée covariante d'une densité sur la variété X^n_r $(r \geqslant 2)$ lorsque la variété X^n_r est muni d'un champ des objets Λ_ν avec la loi de transformation suivante

(3) $$\tilde{\Lambda}_\mu = B^\lambda_\mu \Lambda_\lambda + B^\lambda_\nu B^\nu_{\lambda\mu}.$$

Il est clair qu'il existe un tel champ sur une variété avec une conexion linéaire $\Lambda^\lambda_{\nu\mu}$, c'est-à-dire $\Lambda_\lambda = \Lambda^\nu_{\nu\lambda}$. À l'aide de ce champ on peut definir une dérivée covariante d'une densité.

Si q est une densité ne s'annulant pas sur la varieté X^n, avec la loi de transformation suivante

(4) $$\tilde{q} = \varphi(J)\, q,$$

où

$$\varphi(J) = \begin{cases} \operatorname{sgn} J\, |J|^p \\ |J|^p \end{cases}$$

alors la dérivée covariante de cette densité prend la forme (voir [2], p. 188)

$$\Delta_\nu q = q,^\nu + pA_\nu q.$$

On sait (voir [3]) que s'il existe un champ d'une densité ne s'annulant pas sur la variété différentiable de classe C_2, alors ce champ permet de déterminer uniquement l'objet A_ν avec la loi de transmormation (3), qui est un comitant différentiel du premier ordre de cette densité.

Le but de cette communication est de considérer une variété X^n de classe C_2 muni d'un champ des objets A_ν avec la loi de transformation (3). Dans § 1 nous présenterons la forme générale des comitants différentiels du premier ordre de l'objet A_ν qui sont les objets de première classe. Dans § 2 nous présenterons une certaine caractérisation de l'espace avec le champ A_ν á l'aide des comitants différentiels de tenseurs.

§ 1. Soit X^n une variété de classe C_2 muni d'un champ A_ν avec la loi de transformation (3). Nous démontrerons maintenant une condition nécessaire pour qu'un objet de première classe soit le comitant différentiel du premier ordre de l'objet A_ν.

THÉORÈME 1. *Chaque objet géométrique purment différentiel, de classe C_1, qui est un comitant différentiel du premier ordre de l'objet A_ν, est un comitant algébrique d'un tenseur $V_{\lambda\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} 2\, A_{[\lambda,\mu]}$.*

Nous démontrerons ce théorème ce seulement pour les objets de classe C_1, la démonstration pour des scalairs étant analoque).

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\omega(A_\nu, A_{,\mu})$ un comitant différentiel de premier classe avec la loi de transformation

$$\tilde{\omega} = F(\omega, A),$$

où $A = [A^i{}_r]$ dénote l'élément du groupe $GL(n, R)$. Alors ω satisfait à l'équation

$$\omega(\tilde{A}_\nu \quad \tilde{A}_{\nu,\mu}) = F(\omega(A_\nu;\ A_{\nu,\mu}),\ A). \tag{5}$$

L'objet $(A_\nu ;\ A_{\nu,\mu})$ a la loi de transformation suivante

$$\begin{cases} \tilde{A}_\nu = B^\lambda_\nu \Lambda_\lambda + A^\lambda_\varkappa B^\varkappa_{\lambda\nu}, \\ \tilde{\Lambda}_{\nu,\mu} = B^\lambda_{\nu\mu}\Lambda_\lambda + B^\lambda_\nu B^\lambda_\mu \Lambda_{\lambda,\sigma} + B^\lambda_{\sigma\nu\mu} A^\sigma_\lambda - A^\varkappa_\sigma A^\lambda_\varrho B^\varrho_{\varkappa\mu} B^\sigma_{\varkappa\nu}. \end{cases} \tag{6}$$

Posons maintenant

$$A = E = [\delta^i{}_k],$$

$$B^\lambda_{\nu\mu} = \begin{cases} -A_\nu & \text{pour } \lambda = \nu = \mu \\ 0 & \text{pour } \lambda \neq \nu \text{ ou } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

Il est clair que

$$(7) \qquad \begin{cases} \Lambda_\nu = 0, \\ \Lambda_{\nu\mu} = \begin{cases} B^\lambda_{\lambda\nu\mu} + \Lambda_{\nu,\mu} - 2(\Lambda\nu)^2, & \text{pour } \nu = \mu, \\ B^\lambda_{\lambda\nu\mu} + \Lambda_{\nu,\mu} & \text{pour } \nu \neq \mu. \end{cases} \end{cases}$$

Posons

$$B^\lambda_{\mu\nu\sigma} = \begin{cases} 2(\Lambda_\nu)^2 - \Lambda_{\nu,\sigma} & \text{pour } \lambda = \nu = \sigma = \mu = 1, \\ 0 & \text{pour } \lambda \geqslant 2, \end{cases}$$

$$B^1_{\mu\nu\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \nu \geqslant 2 \text{ et } \mu \geqslant 2 \text{ et } \sigma \geqslant 2 \\ -\Lambda_{\mu,\sigma} & \text{pour chaque permutation } (\nu, \mu, \sigma), \\ & \text{où } \nu \neq 1 \text{ où } \mu \neq 1 \text{ où } \sigma \neq 1. \end{cases}$$

Alors (7) prend la forme

$$\tilde{\Lambda}_{\nu,\mu} = 0, \quad \text{pour} \quad \nu = \mu,$$

pendant que pour $\nu \neq \mu$ on a

$$\tilde{\Lambda}_{\nu,\mu} = \Lambda_{\nu,\mu} + B^\lambda_{\lambda\nu\mu}$$

En vertu de la détermination des quantitées $B^\lambda_{\nu\mu\sigma}$ nous avons

$$\tilde{\Lambda}_{\mu,\nu} = \Lambda_{\mu,\nu} + B^\lambda_{\lambda\nu\mu} = \Lambda_{\mu,\nu} - \Lambda_{\nu,\mu},$$

c'est a dire

$$\tilde{\Lambda}_{\mu,\nu} = 2\,\Lambda_{[\mu,\nu]} \overset{\text{df}}{=} V_{\mu\nu}.$$

Alors finalement la formule (5) prend la forme

$$\omega(\Lambda_\nu;\ \Lambda_{\nu,\mu}) = \omega(0, 2\,\Lambda_{[\nu,\mu]}) \overset{\text{df}}{=} f(V_{\nu\mu})$$

et notre théorème se trouve ainsi demontré.

Comme des conséquences immédiates du théorème 1 et des travaux [5], ([6], p. 116), nous obtenons les corollaires suivantes:

COROLLAIRE 1. *Il n'existe pas W-densité de tenseur q fois covariant et p fois contravariant, où p + q est impaire, qui est le comitant différentiel du premier ordre de l'objet* Λ_ν.

COROLLAIRE 2. *Dans l'espace de dimension n, où n est paire, il n'existe pas des comitants différentiels du premier ordre de l'objet* Λ_ν, *qui sont G-densités de tenseurs q fois covariants et p fois contravariants, où p + q est impaire.*

COROLLAIRE 3. *Dans l'espace de dimension n, où n est impaire, il n'existe pas des comitants différentiels du premier ordre de l'objet* Λ_ν, *qui sont G-densités de tenseurs q fois covariants et p fois contravariants, où p + q est paire.*

Du théorème 1 et de la forme canonique de la matrice du tenseur antisymétrique (voir [4] p. 322) il s'ensuit immédiatment le suivant.

COROLLAIRE 4. *Tout le comitant différentiel scalaire du premier ordre de l'objet Λ_ν est la fonction du rang de la matrice du tenseur $V_{\lambda\mu}$.*

§ 2. Nous considérons maintenant sur la variété X_r^n le champ Λ_ν avec la loi de transformation (3) tel que

$$V_{[\lambda\mu]} \equiv 0. \tag{8}$$

THÉORÈME 2. *Si Λ_ν est le champ de l'objet de classe C_2 detérminé dans un domaine uni connexe de l'espance X_r^n $(r \geqslant 3)$, satisfaisant à la condition* (8), *alors il existe un champ de la densité q dans ce domaine, tel que*

$$\Lambda_\nu = -\frac{1}{p}\frac{q_{,\nu}}{q}. \tag{9}$$

D é m o n s t r a t i o n. Ecrivons l'égalité (9) dans la forme suivante

$$U_{,\nu} = -p\Lambda_\nu, \tag{10}$$

où

$$U = ln\,|\,q\,|.$$

Nous obtenons un système d'équations différentiels partielles du premier ordre. La condition d'intégrabilité du système (10) est suivante (voir [5] p. 176)

$$U_{[\nu,\mu]} = 0.$$

Dans notre cas

$$U_{[\nu,\mu]} = -p\,V_{\nu\mu},$$

d'où d'après la condition (8) on a

$$U_{[\nu,\mu]} = 0.$$

Alors la densité a la forme

$$q = C\cdot e^{-p\int_{\xi_0}^{\xi}\Lambda_\nu d\zeta^\nu}$$

où

$$C = q\,(\xi_0)$$

et notre théorème se trouve ainsi démontré.

De plus il est vrai suivant.

THÉORÈME 3. *Si Λ_ν est le champ de l'objet detérminé dans un domaine de l'espance X^n, alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un système de coordonnées locales tel que*

$$\Lambda_\nu \equiv 0$$

est que

$$\Lambda_{\nu\mu} \equiv 0.$$

Démonstration de ce théorème est analogue à cette donné dans [2], p. 224.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Kucharzewski, *Kovariante Ableitung der Skalare und Dichten,* Prace Naukowe U. Śl., Prace Matematyczne I, (1969), 61—70.
[2] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy,* Warszawa 1956.
[3] E. Kasparek, M. Lorens, *Remarks on differential concomitants of densities,* Ann. Polon. Math. XXV (sous presse).
[4] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Москва 1966
[5] A. Zajtz, *Komitanten der Tensoren zweiter Ordnung,* Zeszyty Naukowe U. J., Prace Matematyczne 8, (1964).
[6] M. Kucharzewski, *Elementy teorii obiektów geometrycznych,* Katowice 1969.
[7] D. Laugwitz, *Differentialgeometrie,* Stuttgart 1960.

Oddano do Redakcji 28. IV. 1971 r.